

Feuilletage lisse de \mathbb{S}^5 par surfaces complexes

Smooth foliation of \mathbb{S}^5 by complex surfaces

Guillaume Deschamps ^a

^a*UFR de Mathématiques, Université Bretagne Occidentale, 29200 Brest cedex.*

Abstract

In 2002 Meersseman-Verjovsky [2] constructed a smooth, codimension-one, foliation on 5-sphere by complex surfaces with two compact leaves. The aim of this note is to improve their construction in order to give a smooth foliation on 5-sphere by complex surfaces with only one compact leaf.

Résumé

En 2002 Meersseman-Verjovsky [2] ont construit un feuilletage de codimension un de \mathbb{S}^5 par feuilles complexes, possédant 2 feuilles compactes. Le but de cette note est d'améliorer la construction afin de munir la sphère de dimension cinq d'un feuilletage lisse à feuilles complexes avec une seule feuille compacte.

1. Introduction

La note de Novikov [5] parue en 1964, où il esquissait une démonstration que tout feuilletage lisse de la 3-sphère par surface possédait une feuille compacte, a eu un impact considérable. On pouvait alors penser que la construction de Lawson [1] d'un feuilletage lisse de codimension un sur \mathbb{S}^5 avec une seule feuille compacte, était optimal du point de vue du nombre de feuilles compactes. Mais on sait, grâce aux récents travaux de Meigniez [4], qu'il existe un feuilletage lisse de codimension un sur la sphère \mathbb{S}^5 dont toutes les feuilles sont denses.

Trente ans plus tard Meersseman-Verjovsky [2] en modifiant la construction de Lawson ont pu définir un feuilletage lisse à feuilles complexes sur \mathbb{S}^5 munit de deux feuilles compactes. Pour les feuilletages lisses à feuilles complexes on n'a pas de résultat du type de celui de Meigniez. La question qui se pose alors est donc : "ce dernier feuilletage est-il optimal en terme de nombre de feuilles compactes?" Le but de cet article est de montrer que non.

Email address: guillaume.deschamps@univ-brest.fr (Guillaume Deschamps).

Théorème : *Il existe un feuilletage lisse à feuilles complexes et de codimension un sur \mathbb{S}^5 ne contenant qu'une seule feuille compacte.*

Pour démontrer ce théorème nous modifierons légèrement la construction de [2] dont nous rappelons ici les notations.

2. Notations

On considère \mathbb{S}^5 comme la sphère unité de \mathbb{C}^3 . Soit

$$W = \{z \in \mathbb{C}^3 - \{0\} / P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}.$$

C'est une variété complexe. Soit K l'intersection de W avec \mathbb{S}^5 . On décompose la 5-sphère en deux variétés à bord : \mathcal{N} , un voisinage tubulaire fermé de K dans \mathbb{S}^5 et \mathcal{M} l'adhérence du complémentaire de \mathcal{N} dans \mathbb{S}^5 . En particulier le bord commun de \mathcal{N} et de \mathcal{M} est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times K$.

Soit X une variété à bord dont le bord ∂X est une variété complexe. On rappelle qu'un feuilletage de X par variétés complexes est dit *plat* [2] s'il s'étend en un feuilletage à feuilles complexes de $X \cup \partial X \times [0, 1]$ qui coïncide avec le feuilletages naturelles du collier $\partial X \times [0, 1]$. L'intérêt de cette définition provient de la proposition suivante.

Proposition [2] : *Soient (X_i, \mathcal{F}_i) deux feuilletages à bord ($i = 1, 2$). Supposons les bords biholomorphes et les feuilletages plats. Alors pour tout biholomorphisme ψ de ∂X_1 sur ∂X_2 , il existe un feuilletage par variétés complexes sur l'union $X_1 \cup_\psi X_2$ (recollé le long du bord via ψ) dont la restriction à X_1 (respectivement à X_2) est \mathcal{F}_1 (respectivement \mathcal{F}_2).*

On sait que \mathcal{N} admet un feuilletage à feuilles complexes plat dont la seule feuille compacte est son bord $\partial \mathcal{N}$ [2]. La démonstration du théorème revient donc à construire un feuilletage plat par variétés complexes sur \mathcal{M} avec comme seule feuille compacte $\partial \mathcal{M}$.

3. Construction d'un feuilletage plat sur \mathcal{M}

On définit $Y = P^{-1}([0, +\infty[) - \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{C}^3$ et l'application

$$g : (z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \mapsto P(z) - \phi(t) \in \mathbb{R}$$

où ϕ est la fonction plate en zéro donnée par :

$$\begin{aligned} \phi :]-\infty, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{e^{-\frac{1}{t}}}} & \text{si } t \in]0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction ϕ a les propriétés suivantes :

- i) ϕ est de classe \mathcal{C}^∞
- ii) $\phi'(t) = \frac{\phi(t)}{t^2 e^{-\frac{1}{t}}} > 0$ si $t > 0$

iii) ϕ est une bijection de $]0, 1]$ sur $]0, \phi(1)]$ d'inverse la fonction $\phi^{-1}(t) = \frac{1}{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)}$.

On prolonge alors ϕ sur $[1, +\infty[$ en une fonction \mathcal{C}^∞ , surjective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et tel que $\phi'(t) > 0 \forall t > 0$.

Posons alors $\Xi = g^{-1}(\{0\}) - \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ et remarquons que Ξ est l'union de

$$\Xi^- = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} / t \leq 0, z \neq [0, 0, 0]\}$$

difféomorphe à $W \times]-\infty, 0]$ et de

$$\Xi^+ = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} / t \geq 0, z \neq [0, 0, 0]\}$$

difféomorphe à Y . L'intersection de ces deux pièces est difféomorphe à $W = \partial Y$ si bien que Ξ est difféomorphe à Y augmenté d'un collier infini. On feuillette alors Ξ^+ par les niveaux

$$L_t = \{(z, t) \in \Xi^+ / P(z) = \phi(t)\}$$

et Ξ^- par les niveaux

$$L_t = \{(z, t) \in \Xi^- / P(z) = \phi(t) = 0\}$$

C'est un feuilletage lisse à feuilles complexes sur Ξ . Pour $0 < \lambda < 1$, on note

$$\begin{aligned} G : \Xi &\longrightarrow \Xi \\ (z, t) &\longmapsto (\lambda j z, h(t)) \end{aligned}$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction constante égale t sur $] -\infty, 0]$ et sur \mathbb{R}^+ égale à :

$$h^+(t) = \phi^{-1}\left(\lambda^3 \phi(t)\right).$$

Le groupe engendré par G agit librement, proprement sur Ξ , respecte le feuilletage et est holomorphe en restriction aux feuilles. Le quotient Y_1 est donc une variété feuilletée par feuilles complexes.

Lemme 1. : *La variété Y_1 est difféomorphe à $\mathcal{M} \cup \partial \mathcal{M} \times]-\infty, 0]$.*

Preuve. Si on note $\text{int}(\Xi^+)$ l'intérieur de Ξ^+ alors le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{int}(\Xi^+) &\longrightarrow P^{-1}(1) \times]0, +\infty[\\ (z, t) &\longmapsto \left(\frac{z}{\phi^{\frac{1}{3}}(t)}, \phi(t)\right) \end{aligned}$$

induit un difféomorphisme entre les feuilletages naturels de ces deux variétés. De plus il conjugue G à :

$$\begin{aligned} \tilde{G} : P^{-1}(1) \times]0, +\infty[&\longrightarrow P^{-1}(1) \times]0, +\infty[\\ (z, t) &\longmapsto (jz, \lambda^3 t) \end{aligned}$$

Le quotient de $\text{int}(\Xi^+)$ par G est donc difféomorphe à un fibré en cercle de fibre $P^{-1}(1)$ et de monodromie donnée par la multiplication par j . Maintenant la fibration de Milnor qui envoie un point z de l'intérieur de \mathcal{M} sur $P(z)/|P(z)|$ a la même monodromie [3]. On a bien $\text{int}(\Xi^+)/G$ difféomorphe à $\text{int}(\mathcal{M})$ et donc Y_1 difféomorphe à $\mathcal{M} \cup \partial \mathcal{M} \times]-\infty, 0]$. \square

Le feuilletage que nous avons construit sur Y_1 est lisse du fait du choix de la fonction ϕ :

Lemme 2. : *La fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ en zéro.*

Ce lemme nous dit précisément que nous avons construit un feuilletage plat à feuilles complexes sur \mathcal{M} dont la seule feuille compacte est son bord. Ce qui conclut la démonstration de notre théorème.

Preuve du Lemme 2. On pose $u(t) = 1 - \ln(\lambda^3)e^{-\frac{1}{t}}$, on peut alors écrire

$$\forall t \in]0, 1] \quad h^+(t) = \phi^{-1}\left(\lambda^3\phi(t)\right) = \frac{t}{t \ln\left(1 - \ln(\lambda^3)e^{-\frac{1}{t}}\right) + 1} = \frac{t}{t \ln(u(t)) + 1}$$

Mais en zéro on a $e^{-\frac{1}{t}} = o(t^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ de sorte que $u(t) = 1 + o(t^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$h^+(t) = \frac{t}{t \ln(1 + o(t^n)) + 1} = \frac{t}{o(t^{n+1}) + 1} = t + o(t^{n+1})$$

En d'autres termes on a $h^+(0) = 0$, $h^{+'}(0) = 1$ et $h^{+(n)}(0) = 0$, $\forall n > 1$. La fonction h est bien de classe \mathcal{C}^∞ en zéro. \square

Remerciements. Je tiens à remercier L. Meersseman d'avoir porté mon attention sur cette question. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

Références

- [1] H. B. Lawson : *Codimension-one foliations of spheres*, Ann. of Math. 94 (1971), 494-503.
- [2] L. Meersseman et A. Verjovsky : *A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces*, Ann. of Math. (2) 156 (2002), 915-930.
- [3] J. Milnor : *Singular points on complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Study 61, Princeton Univ. Press, Princeton (1968).
- [4] G. Meigniez : *Regularization and minimization of Γ_1 -structures*, arXiv : 0904.2912v3 (2010).
- [5] S.P. Novikov : *Foliations of codimension 1 on manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155 (1964), 1010-1013.